

弾性問題に対する有限要素法の基礎

遊佐泰紀

2020年5月21日

概要

有限要素法とは一体全体何なのかという質問をよくされます。特に、応力や変位を出力するブラックボックスとして有限要素法を捉えている人からの質問です。ブラックボックスゆえの気持ち悪さを感じているための質問と推測するのですが、一言での明快な回答はできず、どうしたものかと思っています。

一応の回答としては、有限要素法は支配方程式（偏微分方程式）および境界条件を近似して代数方程式（連立一次方程式）に変換する方法の一つです。偏微分方程式は計算機では解けませんが、連立一次方程式であれば計算機で解くことができます。本資料では、その変換の方法を説明します。論文に出てくる式は本資料に出てくるような式から分岐したものが多いです。いきなり分岐後の式を見るよりは、先に基礎の式を見る方が学習上有効であろうという意図で作成した資料です。数式を省略した直感性重視の資料や数学的な記述汎用性・厳密性重視の資料はインターネット上に多数見つかるのですが、数式展開を重視した工学者向け資料は少ないためにアップロードしています。また、有限要素法のプログラミングの方法については詳しい書籍が数多くあるように思います。

本資料のポイントは弱形式と形状関数です。この二つを数式展開と共に理解していれば、基礎レベルとしては有限要素法に詳しいと言えると思います。

目次

1	支配方程式と境界条件	1
2	弱形式の導出	2
3	形状関数を用いた近似	3
付録 A	形状関数の例	6

1 支配方程式と境界条件

図1のような境界値問題を考える。領域を Ω 、その境界のうち、変位が規定されている部分を Γ_u 、トラクション（表面力）が規定されている部分を Γ_t と定義する。 \boldsymbol{n} は境界上の外向きの単位法線ベクトルである。

微小変形の弾性問題を考える。領域 Ω の支配方程式は、平衡方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

構成方程式 (応力・ひずみ関係式)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

適合条件式 (ひずみ・変位関係式)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (3)$$

の三式を連立させたものである。ただし、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 $\bar{\mathbf{b}}$ は物体力ベクトル、 \mathbf{D} は弾性テンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル、 \mathbf{u} は変位ベクトルである。

境界条件は、変位 \mathbf{u} の規定 (強制変位境界条件、ディリクレ境界条件、基本境界条件)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4)$$

とトラクション (表面力) $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ の規定 (荷重境界条件、ノイマン境界条件、自然境界条件)

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (5)$$

の二つである。

2 弱形式の導出

前節で説明した支配方程式から弱形式を導出する。弱形式に対して、元々の支配方程式は強形式と呼ばれる。有限要素法の最大の特徴は強形式を直接解かず、代わりに弱形式を解くことである。有限要素法が弱形式を好む理由はいくつかあるが、二階以上の微分計算が苦手である点、積分計算が得意である点、トラクションの境界条件の取扱いが素直である点が挙げられる。

平衡方程式 (1) の両辺に重み関数 $\delta \mathbf{u}$ を掛け、領域 Ω について体積積分すると

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (6)$$

となる。重み関数 $\delta \mathbf{u}$ は仮想変位と呼ばれ、 Γ_u 上でゼロ、 Ω 内で非ゼロかつ微分可能である任意の関数である。

ガウスの発散定理を用いて式 (6) を部分積分すると

$$\int_{\Gamma_u \cup \Gamma_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (7)$$

が導かれる。まず、左辺第 1 項に対して $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ on Γ_u と $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ on Γ_t を代入する。そして、左辺第 2 項に対して $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$ where $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{u} + (\nabla \delta \mathbf{u})^T)$ *1 を代入し、移項すると

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (8)$$

*1 対称テンソルと非対称テンソルのダブルドット積は後者を対称化したものに置き換えても等しくなるという公式である。3×3 の成分で書き下して計算すると簡単に証明できる。

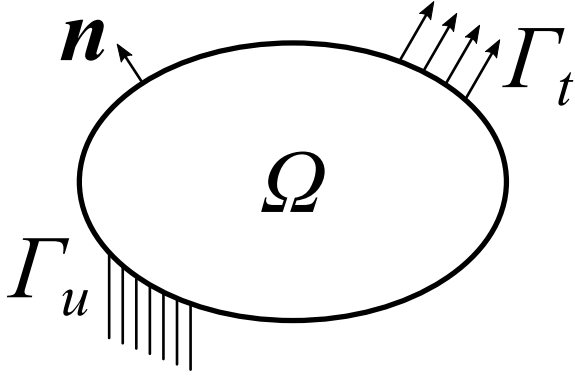


図1 境界値問題

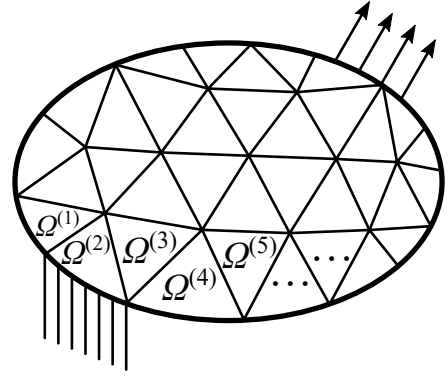


図2 図1を要素分割したもの

が得られる。この式が弱形式である。仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ による仕事の式という見方もできるため、仮想仕事の原理の式や仮想仕事式と呼ばれることもある。

以降の説明のため、仮想仕事式 (8) 中のテンソル演算を等価なベクトル演算で置き換える。応力を $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}]^T$ 、仮想ひずみを $\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\} = [\delta \varepsilon_{11} \ \delta \varepsilon_{22} \ \delta \varepsilon_{33} \ 2\delta \varepsilon_{12} \ 2\delta \varepsilon_{23} \ 2\delta \varepsilon_{31}]^T$ のようにベクトルで表すと、 $\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\}$ となる。また、表記の統一性のために $\bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} = \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{t}}\}$ 、 $\bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} = \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{b}}\}$ と書き換える。以上を代入すると、仮想仕事式 (8) は

$$\int_{\Omega} \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{t}}\} d\Gamma + \int_{\Omega} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{b}}\} d\Omega \quad (9)$$

となる。また、構成方程式 (2) は

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (10)$$

のような行列・ベクトル積に書き換えられる。

3 形状関数を用いた近似

形状関数を用いた変位、仮想変位、ひずみ、仮想ひずみの近似方法を説明する。そして、それらを弱形式に代入することで、最終的な連立一次方程式を導出する。

図1の領域 Ω を図2のように n_e 個のサブ領域 (要素) $\Omega^{(e)}$ ($e = 1, 2, \dots, n_e$) に分割する。図2では三角形の一つ一つが要素であり、各三角形の頂点が節点である。要素 $\Omega^{(e)}$ の境界のうち、変位が規定されていない部分を $\Gamma_t^{(e)}$ と定義する。仮想仕事式 (9) は任意の領域に対して成立するため、

$$\int_{\Omega^{(e)}} \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega = \int_{\Gamma_t^{(e)}} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{t}}\} d\Gamma + \int_{\Omega^{(e)}} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{b}}\} d\Omega \quad (e = 1, 2, \dots, n_e) \quad (11)$$

となる。有限要素法では、座標の関数である要素内の変位 $\{\mathbf{u}\}$ および仮想変位 $\{\delta \mathbf{u}\}$ を多項式で近似する。要素節点上の変位 (節点変位) を $\{\mathbf{d}^{(e)}\} = [d_{1x}^{(e)} \ d_{1y}^{(e)} \ d_{1z}^{(e)} \ d_{2x}^{(e)} \ d_{2y}^{(e)} \ d_{2z}^{(e)} \ \dots \ d_{n_{en}x}^{(e)} \ d_{n_{en}y}^{(e)} \ d_{n_{en}z}^{(e)}]^T$ 、要素節点上の仮想変位を $\{\delta \mathbf{d}^{(e)}\} = [\delta d_{1x}^{(e)} \ \delta d_{1y}^{(e)} \ \delta d_{1z}^{(e)} \ \delta d_{2x}^{(e)} \ \delta d_{2y}^{(e)} \ \delta d_{2z}^{(e)} \ \dots \ \delta d_{n_{en}x}^{(e)} \ \delta d_{n_{en}y}^{(e)} \ \delta d_{n_{en}z}^{(e)}]^T$ とすると、要素内の変位と仮想変位はそれぞれ

$$\{\mathbf{u}\} \approx [\mathbf{N}^{(e)}]\{\mathbf{d}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} d_{1x}^{(e)} + N_2^{(e)} d_{2x}^{(e)} + \dots + N_3^{(e)} d_{n_{en}x}^{(e)} \\ N_1^{(e)} d_{1y}^{(e)} + N_2^{(e)} d_{2y}^{(e)} + \dots + N_3^{(e)} d_{n_{en}y}^{(e)} \\ N_1^{(e)} d_{1z}^{(e)} + N_2^{(e)} d_{2z}^{(e)} + \dots + N_3^{(e)} d_{n_{en}z}^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$\{\delta \mathbf{u}\} \approx [\mathbf{N}^{(e)}] \{\delta \mathbf{d}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \delta d_{1x}^{(e)} + N_2^{(e)} \delta d_{2x}^{(e)} + \cdots + N_3^{(e)} \delta d_{n_{en}x}^{(e)} \\ N_1^{(e)} \delta d_{1y}^{(e)} + N_2^{(e)} \delta d_{2y}^{(e)} + \cdots + N_3^{(e)} \delta d_{n_{en}y}^{(e)} \\ N_1^{(e)} \delta d_{1z}^{(e)} + N_2^{(e)} \delta d_{2z}^{(e)} + \cdots + N_3^{(e)} \delta d_{n_{en}z}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

と近似される。 $[\mathbf{N}^{(e)}]$ が形状関数であり、要素内の座標の関数である。形状関数は内挿関数や基底関数と呼ばれることもある。その成分は

$$[\mathbf{N}^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & N_{n_{en}}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & N_{n_{en}}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & 0 & 0 & N_{n_{en}}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

である。ただし、 n_{en} は要素節点数である。このように、有限要素法では要素内の変位を節点変位の重み付き平均で近似し、その係数を形状関数として与える。形状関数は要素の種類によって異なる関数であり、要素の種類と一対一に対応する。一般に形状関数に求められる性質は **Kronecker delta property** と **partition of unity property** の二つである*2。Kronecker delta property は

$$N_i^{(e)} = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} = \mathbf{x}_i) \\ 0 & (\mathbf{x} = \mathbf{x}_j \text{ for all } j \neq i) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n_{en}) \quad (15)$$

と表される。ただし、 \mathbf{x}_i は要素節点 i の座標である。ある一つの要素節点上で 1 になり、それ以外のすべての要素節点上で 0 になるというものである。Kronecker delta property がないと、節点上 ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$) で要素内変位 $\{\mathbf{u}\}$ と節点変位 $\{\mathbf{d}^{(e)}\}$ が一致しなくなってしまう。つづいて、partition of unity property は

$$\sum_{i=1}^{n_{en}} N_i^{(e)} = 1 \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \Omega^{(e)} \quad (16)$$

と表される。形状関数のすべての成分の和は常に 1 になるというものである。partition of unity property がないと、一様に分布する物理量すら厳密に表現できなくなってしまう（あまりにも精度が悪い近似解法になってしまう）。付録 A に Kronecker delta property と partition of unity property を満たす形状関数の例を示す。

つづいて、形状関数を用いて要素内のひずみ $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ と仮想ひずみ $\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}$ を近似する。適合条件式 (3) から

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & N_{n_{en}}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & N_{n_{en}}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & \cdots & 0 & 0 & N_{n_{en}}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(e)} \\ d_{1y}^{(e)} \\ d_{1z}^{(e)} \\ \vdots \\ d_{n_{en}x}^{(e)} \\ d_{n_{en}y}^{(e)} \\ d_{n_{en}z}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

*2 Kronecker delta はクロネッカーのデルタであるが、partition of unity の定着した和訳はおそらく存在しない。

が導かれる。 $\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$ についても同様である。ここで、

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^{(e)}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & N_{n_{en}}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & N_{n_{en}}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & \cdots & 0 & 0 & N_{n_{en}}^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{n_{en}}^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

と定義すると、要素内のひずみおよび仮想ひずみはそれぞれ

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \approx [\mathbf{B}^{(e)}] \{\mathbf{d}^{(e)}\}, \quad (19)$$

$$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} \approx [\mathbf{B}^{(e)}] \{\delta\mathbf{d}^{(e)}\} \quad (20)$$

と近似できる。 $[\mathbf{B}^{(e)}]$ は B マトリクスと呼ばれ、形状関数と同様にして要素の種類と一対一に対応する関数である。

式 (10) (12) (13) (19) (20) を要素毎の仮想仕事式 (11) に代入し、座標に依存しない $\{\mathbf{d}^{(e)}\}$ と $\{\delta\mathbf{d}^{(e)}\}$ を積分の外に出すと

$$\begin{aligned} &\{\delta\mathbf{d}^{(e)}\}^T \left[\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega \right] \{\mathbf{d}^{(e)}\} \\ &= \{\delta\mathbf{d}^{(e)}\}^T \left\{ \int_{\Gamma_t^{(e)}} [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\bar{\mathbf{t}}\} d\Gamma \right\} + \{\delta\mathbf{d}^{(e)}\}^T \left\{ \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\bar{\mathbf{b}}\} d\Omega \right\} \quad (e = 1, 2, \dots, n_e) \end{aligned} \quad (21)$$

が導かれる。両辺の $\{\delta\mathbf{d}^{(e)}\}$ を消去すると、最終的に

$$[\mathbf{K}^{(e)}] \{\mathbf{d}^{(e)}\} = \{\mathbf{f}^{(e)}\} \quad (e = 1, 2, \dots, n_e) \quad (22)$$

が得られる。ただし、

$$[\mathbf{K}^{(e)}] = \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega, \quad (23)$$

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \int_{\Gamma_t^{(e)}} [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\bar{\mathbf{t}}\} d\Gamma + \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\bar{\mathbf{b}}\} d\Omega \quad (24)$$

である。式 (22) が弾性問題に対する有限要素法の要素毎の連立一次方程式であり、要素剛性方程式と呼ばれる。左辺の係数行列 (要素剛性行列) $[\mathbf{K}^{(e)}]$ や右辺ベクトル (要素外力ベクトル) $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$ の積分計算は、被積分関数が単純な場合を除き、ガウス求積などの数値積分法で計算する。式 (22) を要素毎に重ね合わせると ($\int_{\Omega} = \int_{\Omega^{(1)}} + \int_{\Omega^{(2)}} + \cdots + \int_{\Omega^{(n_e)}}$)、全体剛性方程式が得られる。全体剛性方程式を連立一次方程式解法で求解すると節点変位 $\{\mathbf{d}^{(e)}\}$ が求まり、その後、要素毎に式 (19) でひずみを計算し、式 (10) で応力を計算する。

付録 A 形状関数の例

Kronecker delta property と partition of unity property を満たす形状関数の例を示す。通常は、これらの性質を満たす関数の中で最も低次のものを採用する。

まず、一次元の線分要素の形状関数を示す。図 3 のような 2 節点の線分要素を考える。それぞれの節点座標を x_1 、 x_2 とする。この要素の形状関数は

$$N_1^{(e)} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_2^{(e)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (25)$$

である。これをグラフにプロットしたものを図 4 に示す。 $x = x_1$ のときは $N_1^{(e)} = 1$ かつ $N_2^{(e)} = 0$ 、 $x = x_2$ のときは $N_2^{(e)} = 1$ かつ $N_1^{(e)} = 0$ であることがわかる。また、明らかに $N_1^{(e)} + N_2^{(e)} = 1$ である。

つづいて、図 5 のような 3 節点の線分要素を考える。この要素は要素の中央に 中間節点 x_3 を持つ。形状関数は

$$N_1^{(e)} = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}, \quad N_2^{(e)} = \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)}, \quad N_3^{(e)} = \frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad (26)$$

である。これをグラフにプロットしたものを図 6 に示す。 $x = x_1$ のときは $N_1^{(e)} = 1$ かつ $N_2^{(e)} = N_3^{(e)} = 0$ 、 $x = x_2$ のときは $N_2^{(e)} = 1$ かつ $N_1^{(e)} = N_3^{(e)} = 0$ 、 $x = x_3$ のときは $N_3^{(e)} = 1$ かつ $N_1^{(e)} = N_2^{(e)} = 0$ であることがわかる。また、簡単な計算で $N_1^{(e)} + N_2^{(e)} + N_3^{(e)} = 1$ になることがわかる。式 (25) のように形状関数が座標の一次関数である要素は 一次要素、式 (26) のように二次関数である要素は 二次要素 と呼ばれる。

最後に、二次元と三次元の要素について簡単に触れる。二次元の三角形一次要素と三次元の四面体一次要素では、上記の線分要素と同様にして形状関数を設定することが可能である。しかし、三角形や四面体の二次要素、四辺形要素、六面体要素などでは アイソパラメトリック要素 という技術を用いることが一般的である。アイソパラメトリック要素では、要素毎に局所座標系を設定し、ヤコビアンを用いた座標変換を伴う体積積分を行う。このとき、座標系間の写像に形状関数を用いる。



図3 2節点の線分要素

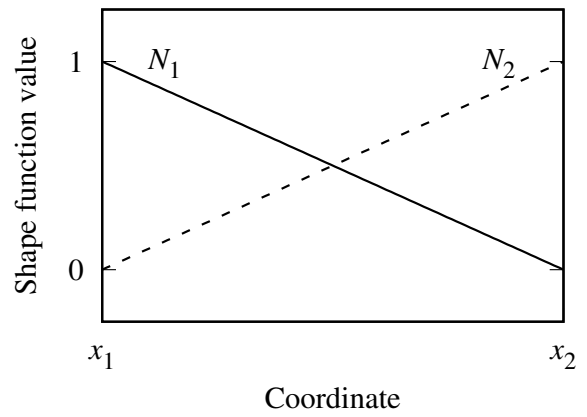


図4 2節点の線分要素の形状関数

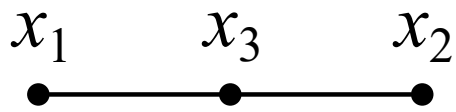


図5 3節点の線分要素

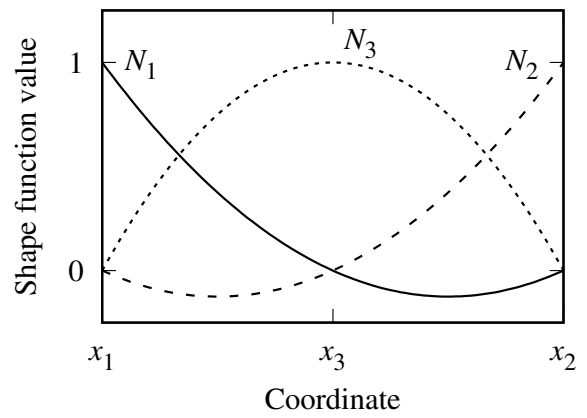


図6 3節点の線分要素の形状関数